

Übungen zur Analysis 2

Blatt 5

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 13.11.2008

Aufgabe 23

(5 Punkte)

Zeige:

- (a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1]$. Berechne die Grenzfunktion und, wo existent, ihre Ableitung.
- (b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right)$ konvergiert punktweise auf $[0, 1]$. Berechne die Grenzfunktion und, wo existent, ihre Ableitung.
- (c) Konvergiert die Reihe aus (b) gleichmäßig auf $[0, 1]$?

Aufgabe 24

(5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{falls } \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

- (a) Skizziere f_1, f_2, f_3 .
- (b) Berechne, falls existent:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx$. (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für $x \in [0, 2]$. (iii) $\int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

- (c) Konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf $[0, 2]$?

Aufgabe 25

(4 Punkte)

Untersuche $\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{lk}$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 26

(3 Punkte)

Beweise: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset \Leftrightarrow |x - y| \geq 2\varepsilon.$$

Interpretiere die Aussage anhand einer Skizze.

Aufgabe 27

(7 Punkte)

Skizziere folgende Punktfolgen $M \subset \mathbb{R}^n$:

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y \leq 3 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$

(d) $M = [0, 1) \times (1, 2] \subset \mathbb{R}^2.$

(e) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2.$

(f) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z \leq x^2 + y^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$

(g) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ t \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq 2\pi \right\} \subset \mathbb{R}^3.$

<http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/>